

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике ученика основних школа
07.12.2019.

VI разред

1. Основица AB једнакокраког троугла ABC је 10 cm, а угао на основици је 72° . Ако симетрала угла BAC сече крак BC у тачки D , израчунај дужину изломљене линије $BADC$.
2. За цео број кажемо да је кул ако је за један већи од броја дељивог са 3 (бројеви облика $3k + 1, k \in \mathbb{Z}$). Израчунај збир свих кул бројева између -300 и 300 .
3. Све цифре петодигитног броја \overline{abcde} ($a \neq 0, e \neq 0$) су међусобно различите. При томе збир цифара једнак је 10. Када се број сабере са бројем написаним истим цифрама, али у обрнутом поретку добија се број чије су све цифре једнаке. Одреди све такве петодигитне бројеве.
4. Микша је радио 6 тестова из математике од којих се сваки бодује целим бројем поена од 0 до 100. Он је на сваком од првих 5 тестова имао исти број поена, а на шестом је добио више поена него на претходном. Ако је у просеку на тих шест тестова остварио 72 поена, колико поена је Микша могао да освоји на последњем тесту?
5. У датом троуглу један унутрашњи угао једнак је неком спољашњем углу тог троугла. У истом троуглу један од преостала два спољашња угла је пет пута већи од неког од преостала два унутрашња угла. Израчунај све унутрашње и спољашње углове тог троугла.

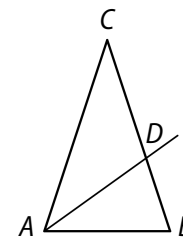
Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатака траје 120 минута.

Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VI РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.



1. Троугао BAD је једнакокрак са угловима од $72^\circ, 72^\circ$ и 36° , па је $AB = AD$ [8 поена]. Троугао ADC је једнакокрак са угловима од $36^\circ, 36^\circ$ и 108° , па је $DA = DC$ [8 поена]. Тражена дужина изломљене линије је $BA + AD + DC = 30\text{cm}$ [4 поена].
2. Сви кул бројеви су облика $3k + 1 (k \in \mathbb{Z})$ и између -300 и 300 има их укупно 200 [8 поена]. Потребно је да израчунамо збир $-299 + (-296) + \dots + 295 + 298$. Ако групишемо први и последњи сабирак, други и претпоследњи, ..., n -ти члан збира са леве стране са n -тим чланом са десне стране, добијамо 100 група сабирака и у свакој је збир -1 [8 поена]. Дакле, тражени збир је -100 [4 поена].
3. (МЛ 52/3) Цифре броја \overline{abcde} су 0, 1, 2, 3, 4 [5 поена]. Бројеви \overline{abcde} и \overline{edcba} имају једнаке збирове цифара па њихов збир има збир цифара 20. По услову задатка, све цифре у збиру су једнаке, па је тај збир 44444 [5 поена]. Следи да је $c = 2$, а да цифре 0 и 4 не могу бити прва ни последња [5 поена]. Оваквих бројева има 4: 14203, 10243, 30241 и 34201 [5 поена].
4. (МЛ 53/4) Означимо са x број освојених поена на сваком од првих 5 тестова, а са y број поена на шестом тесту. Тада је $\frac{5x + y}{6} = 72$ [5 поена] и $y > 72$ [5 поена]. Из $5x + y > 432$ налазимо да је $432 - y$ дељиво са 5 [5 поена], тако да постоји 5 могућности: $y \in \{77, 82, 87, 92, 97\}$ [5 поена].
5. Како је спољашњи угао једнак збиру друга два унутрашња, то спољашњи угао може бити једнак унутрашњем углу само код истог темена. Дакле, троугао је правоугли [4 поена]. Нека су унутрашњи углови α, β и γ , а одговарајући спољашњи α_1, β_1 и γ_1 . Нека је $\gamma = \gamma_1 = 90^\circ$. Могућности за остале углове су $\alpha_1 = 5\beta, \beta_1 = 5\alpha, \alpha_1 = 5\alpha$ и $\beta_1 = 5\beta$.
 - 1) $\alpha_1 = 5\beta$. Из $\alpha_1 = \beta + \gamma$, добијамо $\beta = 22^\circ 30', \alpha = 67^\circ 30', \beta_1 = 157^\circ 30', \alpha_1 = 112^\circ 30'$.
 - 2) $\beta_1 = 5\alpha$. Аналогно претходном, добијемо исте величине углова.
 - 3) $\alpha_1 = 5\alpha$. Из $\alpha + \alpha_1 = 180^\circ$, добијамо $\alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ, \alpha_1 = 150^\circ, \beta_1 = 120^\circ$.
 - 4) $\beta_1 = 5\beta$. Аналогно претходном, добијемо исте величине углова.Дакле, унутрашњи углови тог троугла су: $22^\circ 30', 67^\circ 30'$ и 90° а спољашњи: $157^\circ 30', 112^\circ 30'$ и 90° [8 поена], или унутрашњи: $30^\circ, 60^\circ$ и 90° а спољашњи: $150^\circ, 120^\circ$ и 90° [8 поена].