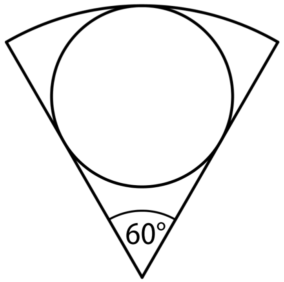
Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике
ученика основних школа
07.12.2019.

VIII разред

1. Одреди све природне бројеве n за које важи
$$\frac{n(200-19n)}{(n-2)^2(n-4)^{2020}}>0.$$

2. Израчунај површину круга уписаног у кружни исечак површине 150π cm^2 чији је централни угао 60° (види слику).



3. Реши једначину у скупу целих бројева
$$||2x-4|-6|+|7-|1-y||=0.$$

4. За које вредности реалног броја m једначина
$$\frac{3x+4m}{4}-\frac{3mx}{2}=m-\frac{x-1}{4}$$
има негативна решења?

5. Колики је најмањи могући збир четири унутрашња угла конвексног седмоугла чији сви углови имају целобројне мере (у степенима)?

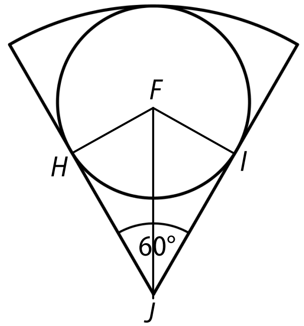
Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VIII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. Да би разломак био дефинисан мора бити $n \neq 2$ и $n \neq 4$ [**2 поена**]. Како је $n > 0$, $(n-2)^2 > 0$ и $(n-4)^{2020} > 0$, разломак је позитиван ако је $200 - 19n > 0$ [**2 поена**], одакле је $n \in \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ [свако решење по **2 поена**].

2. Површина кружног исечка је шестина површине круга из којег је тај исечак. Следи да је површина тог већег круга 900π cm^2, односно да је полупречник исечка 30 cm [**5 поена**]. Нека је F центар круга, а H и I додирне тачке круга и полупречника којим је исечак ограничен, а J центар лука који ограничава кружни исечак. Како је троугао FIJ са угловима од 30°, 60° и 90°, то је $FJ = 2FI$. Одавде следи да је полупречник уписаног круга трећина полупречника исечка, односно 10 cm, па је површина уписаног круга 100π cm^2 [**15 поена**].



3. Да би било $||2x-4|-6| + |7-|1-y|| = 0$ мора бити $||2x-4|-6| = 0$ и $|7-|1-y|| = 0$ [**4 поена**], одакле је $|2x-4| = 6$ и $|1-y| = 7$ [**4 поена**]. Из прве једначине је $2x - 4 = 6$ или $2x - 4 = -6$, одакле је $x = 5$ или $x = -1$ [свако решење по **3 поена**]. Из друге једначине је $1 - y = 7$ или $1 - y = -7$, одакле је $y = -6$ или $y = 8$ [свако решење по **3 поена**].

4. (**МЛ 54/1**) После сређивања добија се $x(4-6m) = 1$, одакле је (за $m \neq \frac{2}{3}$) решење $x=\frac{1}{2(2-3m)}$ [**8 поена**]. Да би било $\frac{1}{2(2-3m)}<0$ потребно је да важи $2 - 3m < 0$, тј. $m>\frac{2}{3}$ [**12 поена**].

5. (**МЛ 53/4**) Збир углова седмоугла је $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_7 = 900°$ [**5 поена**]. Да би збир $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ био минималан, треба да збир преостала три угла $\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7$ буде максималан [**5 поена**], а то ће бити испуњено, због услова задатка када је $\alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_7 = 179°$ [**5 поена**]. Дакле, збир $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ је минималан ако је једнак $900° - 3 \cdot 179° = 363°$ [**5 поена**].